

۱. در یک بررسی آماری، میانگین درآمد ماهیانه ۶۰ نفر برابر با ۴,۵۰۰,۰۰۰ تومان و انحراف معیار آن ۵۰۰,۰۰۰ تومان است. با استفاده از توزیع نرمال، احتمال اینکه فردی درآمدی بین ۴,۰۰۰,۰۰۰ تا ۵,۰۰۰,۰۰۰ تومان داشته باشد را محاسبه کنید.

۲. یک نمونه تصادفی از ۱۰۰ نفر نشان داد که میانگین قد آن‌ها ۱۷۲ سانتی‌متر و انحراف معیار ۸ سانتی‌متر است. با سطح اطمینان ۹۵ درصد، بازه اطمینان برای میانگین قد جامعه را به دست آورید.

۳. فرض کنید زمان پاسخ‌گویی به تماس‌های مشتریان در یک مرکز تماس دارای توزیع نرمال با میانگین ۳ دقیقه و انحراف معیار ۱ دقیقه است. احتمال اینکه یک تماس خاص بیش از ۵ دقیقه طول بکشد چقدر است؟

۴. در یک تحقیق آماری، یک نمونه شامل ۴۰ نفر بررسی شده و میانگین حقوق آن‌ها برابر با ۶,۲۰۰,۰۰۰ تومان بود. اگر انحراف معیار جامعه برابر ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان باشد، در سطح اطمینان ۹۹٪ بازه اطمینان برای میانگین حقوق جامعه را تعیین کنید.

۵. در یک مطالعه، مشخص شده است که ۳۰ درصد از مشتریان یک فروشگاه از خرید خود ناراضی بوده‌اند. در یک نمونه تصادفی ۲۰۰ نفره، احتمال اینکه تعداد افراد ناراضی بین ۵۰ تا ۷۰ نفر باشد را با تقریب نرمال به دست آورید.

۶. یک شرکت ادعا می‌کند که میانگین مدت استفاده مشتریان از خدمات آن‌ها بیش از ۲۴ ماه

است. با استفاده از نمونه‌ای شامل ۳۶ مشتری که میانگین استفاده آن‌ها ۲۲ ماه و انحراف معیار ۶ ماه است، در سطح معناداری ۰,۰۵ این ادعا را آزمون کنید.

سوال ۷:۷. فرض کنید تعداد تصادف‌های روزانه در یک بزرگراه دارای توزیع پواسون با میانگین ۳ تصادف در روز باشد. احتمال اینکه در یک روز خاص دقیقاً ۵ تصادف رخ دهد را محاسبه کنید.

۸. در یک شهر، ۲۰ درصد از خانوارها حداقل یک خودرو خارجی دارند. در یک نمونه ۱۵ تایی، احتمال اینکه حداکثر ۳ خانوار خودرو خارجی داشته باشند را با استفاده از توزیع دوجمله‌ای محاسبه کنید.

۹: دو ماشین تولید یک نوع کالا را انجام می‌دهند. درصد معیوب بودن تولیدات ماشین اول ۴٪ و ماشین دوم ۶٪ است. اگر ماشین اول ۶۰٪ و ماشین دوم ۴۰٪ از کل تولیدات را بر عهده دارند، اگر یک کالا به صورت تصادفی انتخاب شود و معیوب باشد، احتمال اینکه توسط ماشین دوم تولید شده باشد چقدر است؟ (قضیه بیز)

۱۰. برای بررسی ارتباط بین سطح تحصیلات و رضایت شغلی، از ۱۰۰ نفر داده‌هایی در دو متغیر کیفی گردآوری شده است. جدول توافقی (contingency table) به دست آمده است. آزمون χ^2 دو را برای بررسی استقلال این دو متغیر انجام دهید.

۱.

می‌خواهیم احتمال قرار گرفتن درآمد بین ۴,۰۰۰,۰۰۰ تا ۵,۰۰۰,۰۰۰ تومان را با استفاده از نرمال استاندارد پیدا کنیم.

- میانگین $(\mu) = 4,500,000$
- انحراف معیار $(\sigma) = 500,000$

ابتدا Z را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Z1 &= (4000000 - 4500000) / 500000 = -1 \\ Z2 &= (5000000 - 4500000) / 500000 = +1 \end{aligned}$$

طبق جدول Z:

$$P(-1 < Z < 1) \approx 0.6827$$

پاسخ: حدود ۶۸,۲۷٪

۲.

برای ساخت بازه اطمینان ۹۵٪ برای میانگین:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 172 \\ s &= 8 \\ n &= 100 \\ Z & \text{ برای } 95\% = 1.96 \end{aligned}$$

فرمول:

$$\begin{aligned} CI &= \bar{x} \pm Z \times (s / \sqrt{n}) \\ &= 172 \pm 1.96 \times (8 / \sqrt{100}) \\ &= 172 \pm 1.568 \end{aligned}$$

پاسخ: بازه [۱۷۰,۴۳ , ۱۷۳,۵۷]

۳.

می‌خواهیم احتمال اینکه یک تماس بیش از ۵ دقیقه طول بکشد را بیابیم.

$$\begin{aligned} \sigma &= 1, \mu = 3 \\ Z &= (5 - 3) / 1 = 2 \end{aligned}$$

$$P(Z > 2) \approx 0.0228 \quad .$$

پاسخ: حدود ۲,۲۸٪

۴.

$$\bar{x} = 6,200,000 \quad .$$

$$\sigma = 1,000,000 \quad .$$

$$n = 40 \quad .$$

$$Z \text{ برای } ۹۹\% \approx ۲,۵۷۶ \quad .$$

$$\begin{aligned} CI &= \bar{x} \pm Z \times (\sigma / \sqrt{n}) \\ &= 6200000 \pm 2.576 \times (1000000 / \sqrt{40}) \\ &= 6200000 \pm 407467 \end{aligned}$$

پاسخ: بازه $[۵۷۹۲۵۳۳, ۶۶۰۷۴۶۷]$

۵.

$$p = 0.3, n = 200 \quad .$$

$$\mu = np = 60 \quad .$$

$$\sigma = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{(200 \times 0.3 \times 0.7)} \approx 6.48 \quad .$$

برای: $P(50 \leq X \leq 70)$

$$Z1 = (49.5 - 60) / 6.48 \approx -1.62$$

$$Z2 = (70.5 - 60) / 6.48 \approx 1.62$$

$$P(-1.62 < Z < 1.62) \approx 0.894$$

پاسخ: حدود ۸۹,۴٪

۶.

$$H_0: \mu = 24 \quad .$$

$$H_1: \mu > 24 \quad .$$

$$n = 36, s = 6, \bar{x} = 22 \quad .$$

$$Z = (22 - 24) / (6 / \sqrt{36}) = -2$$

در سطح $\alpha = 0.05$ ، مقدار بحرانی $Z \approx 1.645$

چون Z محاسبه شده $Z <$ بحرانی،

نتیجه: فرض صفر رد نمی شود.

۷.

توزیع پواسون با $\lambda = 3$

$$P(X = 5) = (e^{-3} \times 3^5) / 5! \\ = (0.0498 \times 243) / 120 \approx 0.1008$$

پاسخ: حدود ۱۰,۰۸٪

۸.

$$p = 0.2, n = 15$$

می‌خواهیم $P(X \leq 3)$ را محاسبه کنیم.

استفاده از جدول یا نرم‌افزار برای محاسبه:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) \approx 0.815$$

پاسخ: حدود ۸۱,۵٪

۹. (قضیه بیز):

$$P(A|B): \text{احتمال معیوب بودن از ماشین دوم} = ۰,۰۶$$

$$P(B): \text{احتمال تولید توسط ماشین دوم} = ۰,۴۰$$

$$P(A): \text{احتمال معیوب بودن} = ۰,۰۴۸ = ۰,۴ \times ۰,۰۶ + ۰,۶ \times ۰,۰۴$$

$$P(B|A) = (0.06 \times 0.4) / 0.048 \approx 0.5$$

پاسخ: ۵۰٪

۱۰.

برای آزمون خی دو:

فرمول کلی:

$$\chi^2 = \sum [(O - E)^2 / E]$$

مقدار محاسبه شده با مقدار بحرانی جدول (χ^2 با درجه آزادی مناسب) مقایسه می‌شود.
اگر χ^2 محاسبه شده $> \chi^2$ جدول $\rightarrow$ فرض استقلال رد می‌شود.